

Е. М. Бронштейн, Е. И. Прокудина, А. С. Герасимова, К. Г. Дубинская

Оценка взаимосвязей временных рядов курсов акций с помощью копула-функций¹

В работе исследуются взаимосвязи на фондовых рынках, влияние на них структурных изменений в экономике, возможность адекватного прогноза на определенные сроки. Анализ взаимосвязей курсов акций проводится с использованием копула-функций. Строятся статистические оценки копула-функций на решетке. Сравниваются расстояния в метрике L^1 до максимальной (комонотонной), минимальной (контрмонотонной) и независимой копула-функций.

Ключевые слова: акции, копула-функция, комонотонность, контрмонотонность, независимость случайных величин.

JEL classification: C02, C58.

1. Введение

Современный финансовый рынок характеризуется высокой степенью экономических взаимосвязей. При этом ценные бумаги были и остаются важнейшей его составляющей. Аналитики во всем мире следят за динамикой цен акций, пытаясь спрогнозировать дальнейшее их поведение, установить и формализовать имеющиеся закономерности. Многие существующие математические модели не учитывают взаимосвязи между ценными бумагами или используют в качестве меры зависимости различные коэффициенты корреляции, а они базируются на ряде предпосылок. Так, в основе корреляционного анализа лежит гипотеза о линейной зависимости переменных. Часто бывает, что достоверно известно о существовании зависимости между переменными, но корреляционный анализ не дает адекватного результата, поскольку эта зависимость нелинейна. Кроме того, коэффициенты корреляции не идентифицируют однозначно независимость случайных величин. Более точной и полной мерой зависимости случайных величин является копула-функция, которая учитывает характер зависимости, отсекая все лишнее. В данной статье копула-функции пар случайных величин используются для анализа взаимосвязей цен акций компаний, относящихся к ведущим отраслям экономики России и США, в докризисный период и период кризиса, с учетом и без учета временных лагов. В частности, оцениваются меры близости к независимости, комонотонности и контрмонотонности пар случайных величин. Заметим, что подобный анализ взаимосвязей цен акций может применяться при отборе акций для формирования портфеля ценных бумаг. Для обеспечения хеджирования целесообразно отбирать семейства акций, пары которых близки к контрмонотонности или независимости.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-06-00001) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации № НШ-65497.2010.9.

2. Основные понятия

Прообраз копула-функций появился в работе (Hoeffding, 1940), в которой была поставлена задача определения верхней и нижней границ для совместного распределения случайных величин. Термин «копула» впервые употребил Склар (Sklar, 1959), который дал точное определение и описал свойства таких функций. Подробному изложению теории копула-функций посвящена книга (Nelsen, 2006). Идея применения копула-функции в финансах появилась в работе (Embrechts et al., 2002) в связи с ограниченностью использования коэффициента линейной корреляции для измерения зависимости случайных величин. С этого времени копула-функции стали активно использоваться в микро- и макроэкономике, риск-менеджменте, при расчете цен активов, деривативов и т. д. Количество статей по применению копула-функций в финансах и экономике сильно возросло в последние годы. Так, в базе издательства Springer значится 40 статей по рассматриваемой тематике за 2000 год и 377 за 2010 год. Соответствующие обзоры приведены в (Пеникас, 2010; Fredheim, 2008).

Дадим основные определения. Копула-функция может применяться к совместному распределению любого числа случайных величин k , здесь рассмотрим нужный нам случай $k = 2$.

Двумерной копула-функцией называется отображение $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющее следующим условиям (Nelsen, 2006):

- 1) $\forall u, v \in [0, 1] \quad C(u, 0) = C(0, v) = 0$;
- 2) $\forall u, v \in [0, 1] \quad C(u, 1) = u, \quad C(1, v) = v$;
- 3) если $u_1 \geq u_2, v_1 \geq v_2$, то $C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0$.

Всякая копула является функцией двумерного распределения, маргинальные распределения которого являются равномерными на отрезке $[0, 1]$.

Связь между совместным распределением случайных величин X, Y и копула-функцией выражается следующей теоремой существования и единственности Склара.

Пусть $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ — функция распределения двумерной случайной величины (X, Y) , маргинальные функции распределений которой есть $F_1(x) = P(X \leq x)$, $F_2(y) = P(Y \leq y)$. Тогда существует такая копула-функция C , что $H(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$, причем эта функция будет единственной, если функции $F_1(x)$ и $F_2(y)$ непрерывны.

Обратно, если $C(u, v)$ — копула-функция, $F_1(x), F_2(y)$ — функции распределения, то $H(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$ является функцией двумерного распределения с маргинальными функциями распределений $F_1(x), F_2(y)$.

Таким образом, копулы — это функции, которые связывают многомерные распределения с их маргинальными распределениями. Можно сказать, что копула-функция — это минимально необходимая информация о совместном распределении, которая характеризует взаимосвязь маргинальных распределений.

Для анализа характера зависимости используется множество эталонных копула-функций. Обзор наиболее распространенных функций приведен, например, в (Пеникас, 2010). При этом следует иметь в виду, что пространство копула-функций имеет бесконечную размерность (в частности, замкнуто относительно образования выпуклых комбинаций), т. е. полное конструктивное описание этого пространства затруднительно.

Исходя из применимости анализа характера зависимости курсов акций к формированию портфелей, рассмотрим три вида копула-функций: независимые, ко- и контрмонотонные.

Случайные величины являются независимыми тогда и только тогда, когда их копула-функция имеет вид $C^{\perp}(u, v) = uv$. Случайные величины называются комонотонными, если рост одной всегда сопровождается ростом другой. В этом и только этом случае копула-функция равна $C_{\max}(u, v) = \min\{u, v\}$. Наконец, случайные величины X и Y называются контрмонотонными, если X и $-Y$ комонотонны. Только при выполнении этого условия копула-функция равна $C_{\min}(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$.

Для любой копула функции справедливы неравенства Фреше–Хёффдинга:

$$\forall u, v \in [0, 1] \quad C_{\min}(u, v) \leq C(u, v) \leq C_{\max}(u, v).$$

Таким образом, ко- и контрмонотонности соответствуют экстремальные копула-функции.

3. Методика, результаты исследования и их анализ

Опишем построение статистической оценки копула-функции по экспериментальным данным на решетке с шагом $1/N$ (Nelsen, 2006), которое применялось в настоящей работе.

Пусть имеются результаты наблюдений $\{x_k, y_k\}_{k=1}^n$, где n — число наблюдений (предполагается, что $n \gg N$), $x_{(i)}$, $y_{(j)}$ — соответствующие порядковые статистики (вариационные ряды). За оценку значения копула-функции $C\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right)$ принимаем величину $n(i, j)/n$, где $n(i, j)$ — число пар выборки $\{x_k, y_k\}$, для которых $x_k \leq x_{(i)}$, $y_k \leq y_{(j)}$.

Для каждой пары временных рядов курсов акций по изложенной методике вычислялись оценки значений копула-функций $C(u, v)$, затем вычислялись дискретные приближения (в метрике L^1)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| C\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) - C^*\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) \right|,$$

где в качестве эталонной копула-функции C^* поочередно использовались $C^{\perp}, C_{\min}, C_{\max}$. В каждом случае из этих трех отклонений выбиралось наименьшее. Если наименьшее отклонение соответствовало C_{\min} , то считалось, что зависимость имеет контрмонотонный характер (в последующих таблицах обозначение «−»), если C_{\max} , то комонотонный (обозначение «+»), а если C^{\perp} , то независимый (обозначение «0»).

Отметим, что использование метрики L^1 (и ее дискретного приближения) позволяет сравнивать близость исследуемой копулы к нескольким эталонам, в то время как известные статистические метрики (Колмогорова-Смирнова, Крамера-фон-Мизеса, Хелинджера и др.) дают возможность сравнивать расстояния от нескольких эмпирических функций до одного эталонного распределения.

3.1. Взаимосвязь временных рядов курсов акций компаний России и США в докризисный период и в период кризиса

Исследовались акции перечисленных ниже компаний, относящихся к различным секторам экономики за 2006–2007 и 2008–2009 годы (брались ежедневные цены закрытия). Из каждого сектора выбиралось по три компании для каждой страны, см. табл. 1.

Таблица 1. Перечень анализируемых компаний

	Россия	США
Банки	(Б1) Сбербанк (Б2) Банк Москвы (Б3) Банк Возрождение	(B1) Bank of America (B2) Citigroup Inc. (B3) The Bank of New York
Нефтегазовые компании	(Н1) Лукойл (Н2) Сургутнефтегаз (Н3) Газпромнефть	(N1) Anadarko (N2) Devon Energy Group (N3) Noble Energy
Энергетика	(Э1) Мосэнерго (Э2) Иркутскэнерго (Э3) Якутскэнерго	(E1) General Electric (E2) Apache Corporation (E3) Cabot Oil&Gas
Машиностроение	(М1) Камаз (М2) ОАО Соллерс (М3) ОМЗ	(A1) Ford Motor (A2) Navistar (A3) Caterpillar
Телекоммуникации и связь	(Т1) Волгателеком (Т2) Дальсвязь (Т3) Ростелеком	(S1) Sprint Nextel (S2) Time Warner Inc. (S3) Qwest Communication

Источником расчетов являлись данные с сайтов <http://www.micex.ru/>, <http://www.google.com/finance/>, <http://www.stocks.investfunds.ru/>.

Результаты вычислений при $N = 10$, т. е. на решетке с шагом 0.1, приведены в табл. 2–7 Приложения.

Прокомментируем полученные результаты.

В период кризиса произошел заметный сдвиг в сторону комонотонности взаимозависимостей курсов акций на финансовых рынках как России, так и США. Это обстоятельство согласуется с тем, что в случае общей опасности все двигаются в одну сторону. Тем самым эффективность диверсификации как средства хеджирования риска при формировании портфеля ценных бумаг в кризисных условиях снижается.

В докризисный период на российском финансовом рынке зависимости курсов акций ряда отраслей (банков, нефтегазовых, телекоммуникационных) имеют комонотонный характер. Для рынка США это верно только для акций энергетических компаний.

В этот же период на российском рынке наблюдался комонотонный характер зависимости курсов акций банковского сектора с акциями телекоммуникационного сектора, а также с акциями компаний энергетической (кроме Якутскэнерго) и металлургической (кроме ОМЗ) отраслей. В то же время наблюдалась независимость (а в ряде случаев и контрмонотонность) между банковским и нефтегазовым сектором. Акции нефтегазовых компаний были преимущественно независимы от акций компаний других отраслей. Это соответствует их роли на рынке. Наблюдалась комонотонная зависимость акций телекоммуникационных компаний с энергетическими и металлургическими компаниями (с теми же исключениями).

В докризисный период на рынке США акции компаний различных отраслей, как правило, независимы. Это обстоятельство обеспечивает высокий эффект от диверсификации портфеля.

Контрмонотонный характер зависимости в докризисный период весьма редок, причем чаще встречается на российском рынке, нежели на рынке США. В кризисный период контрмонотонная зависимость не наблюдалась.

В кризисный период курсы акций двух компаний на каждом рынке (Сургутнефтегаз и Ростелеком в России, Ford Motor и Qwest Communication в США) при общей склонности к комонотонности оказались независимыми от курсов ряда других акций.

В докризисный период акции всех отраслей России независимы от акций тех же отраслей США, т. е. в условиях стабильного развития экономики взаимосвязь российского рынка с внешними рынками можно оценить как незначительную. В период кризиса акции всех отраслей России преимущественно комонотонны с акциями тех же отраслей США. Таким образом, в период нестабильности заметно возрастает зависимость российского фондового рынка от конъюнктуры на мировых финансовых рынках.

3.2. Взаимосвязь временных рядов курсов акций при различных временных лагах

С целью выявления длины временного промежутка, на котором возможен адекватный прогноз о динамике курсов акций, сравнивались между собой временные ряды курсов акций, полученные из некоторого исходного ряда с помощью сдвигов на определенные временные лаги.

Для исследования были выбраны временные ряды акций российских и зарубежных компаний (использовались ежедневные курсы закрытия за период 03.01.2000–31.03.2010): ОАО «Сбербанк России», ОАО «Аэрофлот», ОАО «Лукойл», ОАО «Сургутнефтегаз», Apple Inc., Yahoo! Inc., Nokia Corp., а также фондовых индексов ММВБ, РТС, S&P 500, NASDAQ Composite, BOVESPA Brazil.

Данные были взяты из следующих источников: <http://www.micex.ru/>, <http://www.finam.ru/>, <http://www.rts.ru/>.

Результаты вычислений при $N = 10$ приведены в табл. 8–12 Приложения.

Из полученных результатов следует, что для большинства акций при временных лагах менее 30 дней доминирует комонотонная зависимость между ценами акций; а при временных лагах более одного месяца — независимость. На временных лагах более 300 дней появляется аномально контрмонотонная зависимость. Данные результаты свидетельствуют о нецелесообразности прогнозирования динамики курсов акций на срок более одного месяца.

4. Заключение

В статье приведены результаты исследования характера зависимости временных рядов курсов акций и взаимосвязи этих рядов для различных временных сдвигов на основе копула-функций. Выделены три вида зависимости: независимость, контрмонотонность и комонотонность. Использованный подход позволил указать некоторые особенности динамики курсов акций, в частности, выявлено различие этой динамики в докризисный и кризисный период.

Авторы благодарны анонимному рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

Пеникас Г. И. (2010). Модели «копула» в приложении к задачам финансов. *Журнал Новой Экономической Ассоциации*, 7, 24–44.

Embrechts P., McNeil A., Straumann D. (2002). Correlation and dependence properties in risk management: properties and pitfalls. In: M. Dempster (ed.) *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press.

Fredheim M. (2008). *Copula methods in finance*. VDM Verlag Dr. Muller Aktienges.

Hoeffding W. (1940). Scale invariant correlation theory. *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität*, 5, 181–233.

Nelsen R. (2006). *An introduction to copulas*. Second Edition. Springer. New York.

Sklar A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8, 229–231.

Приложение

Таблица 2. Взаимосвязь курсов акций компаний России в докризисный период (2006–2007)

	Б1	Б2	Б3	Н1	Н2	Н3	Э1	Э2	Э3	М1	М2	М3	Т1	Т2	Т3
Б1		+	+	0	–	0	+	+	0	+	+	0	+	+	+
Б2			+	0	0	0	+	+	0	+	+	0	+	+	+
Б3				0	–	0	+	+	0	+	+	0	+	+	+
Н1					+	+	0	0	0	0	0	+	0	0	0
Н2						+	0	0	0	–	0	+	0	0	–
Н3							+	+	0	0	0	0	0	0	0
Э1								+	0	+	+	0	+	+	+
Э2									0	+	+	0	+	+	+
Э3										0	0	+	0	0	0
М1											+	0	+	+	+
М2												0	+	+	+
М3													0	0	0
Т1														+	+
Т2															+
Т3															

Таблица 3. Взаимосвязь курсов акций компаний России в период кризиса (2008–2009)

	Б1	Б2	Б3	Н1	Н2	Н3	Э1	Э2	Э3	М1	М2	М3	Т1	Т2	Т3
Б1		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
Б2			+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
Б3				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Н1					0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
Н2						+	+	0	0	0	0	0	+	+	0
Н3							+	+	+	+	+	+	+	+	0
Э1								+	+	+	+	+	+	+	0
Э2									+	+	+	+	+	+	0
Э3										+	+	+	+	+	0
М1											+	+	+	+	0
М2												+	+	+	0
М3													+	+	0
Т1														+	0
Т2															0
Т3															

Таблица 4. Взаимосвязь курсов акций компаний США
в докризисный период (2006–2007)

	B1	B2	B3	N1	N2	N3	E1	E2	E3	A1	A2	A3	S1	S2	S3
B1		+	0	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+
B2			0	–	0	0	0	0	0	0	+	0	0	+	+
B3				0	+	+	+	+	+	0	+	0	0	0	0
N1					0	0	0	+	0	0	+	+	0	0	0
N2						+	+	+	+	0	+	0	0	0	0
N3							+	+	+	0	+	0	0	0	+
E1								+	+	0	+	0	0	+	0
E2									+	0	+	+	0	0	0
E3										0	+	0	0	0	+
A1											+	0	0	0	0
A2												+	0	+	+
A3													0	0	0
S1														0	0
S2															+
S3															

Таблица 5. Взаимосвязь курсов акций компаний США
в период кризиса (2008–2009)

	B1	B2	B3	N1	N2	N3	E1	E2	E3	A1	A2	A3	S1	S2	S3
B1		+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	0
B2			+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	0
B3				+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
N1					+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
N2						+	+	+	+	0	+	+	+	+	0
N3							+	+	+	+	+	+	+	+	+
E1								+	+	0	+	+	+	+	0
E2									+	+	+	+	+	+	+
E3										+	+	+	+	+	+
A1											0	+	0	0	+
A2												+	+	+	+
A3													+	+	+
S1														+	+
S2															0
S3															

Таблица 6. Взаимосвязь курсов акций однотипных компаний России и США в докризисный период (2006–2007)

	B1	B2	B3	N1	N2	N3	E1	E2	E3	A1	A2	A3	S1	S2	S3
B1	0	0	+												
B2	0	0	+												
B3	0	0	+												
H1				0	0	0									
H2				0	–	–									
H3				0	0	0									
Э1							+	+	+						
Э2							+	+	+						
Э3							0	–	0						
M1										0	+	0			
M2										0	+	0			
M3										0	0	0			
T1													+	0	0
T2													0	0	0
T3													0	0	+

Таблица 7. Взаимосвязь курсов акций однотипных компаний России и США в период кризиса (2008–2009)

	B1	B2	B3	N1	N2	N3	E1	E2	E3	A1	A2	A3	S1	S2	S3
B1	+	+	+												
B2	+	+	+												
B3	+	+	+												
H1				0	0	0									
H2				+	0	+									
H3				+	+	+									
Э1							+	+	+						
Э2							+	+	+						
Э3							+	+	+						
M1										+	+	+			
M2										0	+	+			
M3										0	+	+			
T1													+	+	+
T2													+	+	+
T3													0	0	0

В последующих таблицах t_1 , t_2 — временные лаги, на которые сдвинуты соответственно первый и второй временные ряды (относительно исходного ряда), пробел означает недостаточность данных для вычислений.

Таблица 8. Взаимосвязь курсов акций ОАО «Сбербанк России» и ОАО «Аэрофлот» при различных временных лагах

$t_1 \backslash t_2$	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500
	Сбербанк					Аэрофлот			
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14	+	+	+	+	0	+	+	+	+
30	0	+	+	+		+	+	+	+
50	0	+	+	+		+	+	+	+
100	0	+	+	+		+	+	+	+
300	0	+	+	0		0	+	+	+
500	0	+	0	0		+	+	+	

Таблица 9. Взаимосвязь курсов акций ОАО «Лукойл» и ОАО «Сургутнефтегаз» при различных временных лагах

$t_1 \backslash t_2$	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500	2000
	Лукойл					Сургутнефтегаз				
1	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+
7	+	+	+	0	+	+	0	+	+	+
14	+	+	+	0	+	0	0	+	+	+
30	0	+	+	0	+	0	0	+	+	0
50	0	+	+	0		0	0	+	+	
100	0	+	+	0		0	0	+	+	
300	0	+	+	0		0	0	0	+	
500	0	+	0	0		0	–	+	0	

Таблица 10. Взаимосвязь курсов акций Apple Inc., Yahoo! Inc., Nokia Corp. при различных временных лагах

$t_1 \backslash t_2$	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500
	Apple					Yahoo!					Nokia			
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	0	+	+
14	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	0	+	+
30	+	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	0	+	+
50	+	0	+	+	0	+	+	+	0	+	+	0	+	+
100	0	0	+	+	0	+	+	0	0	+	+	0	+	0
300	0	0	+	0		0	+	–	0		+	0	+	–
500	0	0	+	0		+	0	0	–		0	0	+	–

Таблица 11. Взаимосвязь фондовых индексов ММВБ и РТС при различных временных лагах

$t_1 \backslash t_2$	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500	2000
	ММВБ					РТС				
1	0	+	+	+	+	+	+	+	0	+
7	0	+	+	+	+	+	+	+	0	+
14	0	+	+	+	+	+	+	0	0	+
30	0	+	+	+	+	+	+	+	0	+
50	0	+	+	+		+	+	+	0	+
100	0	+	+	+		+	+	0	0	
300	0	+	+	+		+	0	0	0	
500	0	+	+	0		+	0	0	0	

Таблица 12. Взаимосвязь фондовых индексов S&P 500, NASDAQ Composite, BOVESPA Brazil при различных временных лагах

$t_1 \backslash t_2$	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500	2000	1	500	1000	1500
	S&P 500					NASDAQ Composite					BOVESPA Brazil			
1	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	
14	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	
30	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	
50	+	+	+	0	+	+	0	0	+	+	+	+	+	
100	–	+	+	0	0	+	0	0	+	+	+	+	+	
300	0	+	+	–		+	0	0	0	0	+	+	–	
500	–	+	0	0		0	0	0	–		+	+	+	